В заключении статьи выражаю благодарность Ю. И. Шевченко за обсуждение результатов работы и ценные советы.

Список литературы

1. *Егоров А. И., Егоров И. П., Егорова Л. И.* Приводимые и полуприводимые метрические пространства линейных элементов и их место в теории движений // Межвузовский сб. науч. трудов. Пенза, 1991. С. 38—62.

A. Egorov

Geometrical intepretation of some movable metric spaces of linear elements of different lacunae of main case

This paper is dedicated to the research described in the article [1], in which the same designations and definitions are user. The article considers such spaces as $A^n(m;n-m)$, $M^n(m;n-m)$ as metric spaces of linear elements whose metrics of tangent Riemannian space is space $\Pi^n(m;n-m)$ in each point $(m \neq 1)$.

УДК 514.75

С. С. Кузыбаева, Ю. И. Попов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
yurij.popoff2015@yandex.ru

Аффинные связности на гиперповерхности Ω^1_{n-1}

На гиперповерхности Ω^1_{n-1}, огибающей однопараметрическое семейство характеристик X_{n-2} одномерной гиперполосы H_1 [1], дано задание внутренней (касательной) аффинной и нормальных аффинных связностей.

© Кузыбаева С. С., Попов Ю. И., 2015

Ключевые слова: гиперповерхность, гиперполоса, аффинная связность, нормальная линейная связность, расслоение, формы связности, тензоры кривизны.

Во всей статье применяются обозначения и замечания работы [1].

Схема использования индексов следующая:

$$\mathrm{I,K,J,L}=\overline{1,\mathrm{n}};\;\; \mathrm{i,j,k}=\overline{1,\mathrm{n}-1};\;\; \alpha,\beta,\gamma=\overline{2,\mathrm{n}-1};\;\; \mathrm{a,b,c}=\overline{2,\mathrm{n}};$$

$$\mathrm{p,q,r}=\{1,\mathrm{n}\}.$$

1. Введем в рассмотрение гиперповерхность Ω^1_{n-1}, огибающую поверхность однопараметрического семейства характеристик X_{n-2} гиперполосы H_1 [1].

В силу сопряженности характеристики X_{n-2} и касательной L_1 к базисной кривой L_1 фундаментальный тензор $\{V^n_{ij}\}$ гиперполосы имеет строение

$$\left\|V^n_{ij}\right\|=\left\|\begin{matrix}\Lambda^n_{11} & 0\\ 0 & V^n_{\alpha\beta}\end{matrix}\right\|,\text{ причем } \det\left\|V^n_{ij}\right\|\neq 0\,.$$

Относительно репера $R_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \{A,\vec{e}_1,\vec{e}_\alpha,\vec{e}_n\}$ [1] гиперповерхность Ω^1_{n-1} задается уравнениями

$$\omega^n=0,\;\; \omega^n_1=\Lambda^n_{11}\omega^1;\;\; \omega^n_\alpha=V^n_{\alpha\beta}\omega^\beta, \tag{1}$$

$$\begin{cases}\omega^\alpha_1=F^\alpha_{1i}\omega^i=F^\alpha_{11}\omega^1+F^\alpha_{1\beta}\omega^\beta,\\ \omega^1_\alpha=G^1_{\alpha i}\omega^i=G^1_{\alpha 1}\omega^1+G^1_{\alpha\beta}\omega^\beta,\end{cases} \tag{2}$$

$$\nabla F^\alpha_{11}+\Lambda^\alpha_{11}\omega^1_n=F^\alpha_{11i}\omega^i,\;\; \nabla F^\alpha_{1\beta}=F^\alpha_{1\beta i}\omega^i, \tag{3}$$

$$\nabla G_\alpha=G_{\alpha i}\omega^i,\;\; \nabla G^1_{\alpha\beta}+V^n_{\alpha\beta}\omega^1_n=G^1_{\alpha\beta i}\omega^i, \tag{4}$$

где $G_\alpha=G^1_{\alpha 1}$.

2. Адаптируем репер R_1 полю нормалей $N_1(A)$ 1-го рода гиперповерхности Ω^1_{n-1}, выбирая вектор $\vec{e}_n \parallel N_1(A)$. В этом случае

$$\omega^1_n = \lambda^1_{ni}\omega^i,\ \omega^\alpha_n = \lambda^\alpha_{ni}\omega^i, \tag{5}$$

а поле нормалей 1-го рода $N_{n-1}(A)$ L-подрасслоения определяется уравнениями

$$\nabla\lambda^1_{ni} = \lambda^1_{nij}\omega^j. \tag{6}$$

Таким образом, уравнения (1) — (6) задают оснащенную полем нормалей 1-го рода $N_1(A)$ гиперповерхность Ω^1_{n-1}.

При фиксации точки $A \overset{\text{def}}{=} x$ гиперповерхности Ω^1_{n-1} плоскости N_x (нормаль 1-го рода гиперповерхности в точке x) и T_x (касательная плоскость гиперповерхности) остаются неподвижными. Следовательно, на гиперповерхности Ω^1_{n-1} возникает нормальное $N(\Omega)$ и касательное $T(\Omega)$ расслоения [2].

Структурные уравнения расслоения $T(\Omega)$ в силу формул (1—4, 5) имеют вид

$$\begin{aligned} &D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,\ D\omega^1_1 = \Omega^1_1, D\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,\\ &D\omega^\alpha_1 = \omega^i_1 \wedge \omega^\alpha_i + \Omega^\alpha_1, D\omega^1_\alpha = \omega^i_\alpha \wedge \omega^1_i + \Omega^1_\alpha, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &\Omega^1_1 = \omega^\alpha_1 \wedge \omega^1_\alpha + \omega^n_1 \wedge \omega^1_n = F^\alpha_{1i}\omega^i \wedge G^1_{\alpha j}\omega^j + \Lambda^n_{11}\omega^1 \wedge \lambda^1_{nj}\omega^j =\\ &= R^1_{1ij}\omega^i \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\Omega^\beta_\alpha = \omega^1_\alpha \wedge \omega^\beta_1 + \omega^n_\alpha \wedge \omega^\beta_n = G^1_{\alpha i}\omega^i \wedge F^\beta_{1j}\omega^j + V^n_{\alpha\gamma}\delta^\gamma_i\omega^i \wedge \lambda^\beta_{ni}\omega^\gamma =\\ &= R^\beta_{\alpha ij}\omega^i \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Omega^\alpha_1 = \omega^n_1 \wedge \omega^\alpha_n = R^\alpha_{1ij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{10}$$

$$\Omega^1_\alpha = \omega^n_\alpha \wedge \omega^1_n = R^1_{\alpha ij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{11}$$

$$R^1_{1ij} = F^\alpha_{1[i} G^1_{|\alpha|j]} + \Lambda^n_{11} \delta^1_{[i} \lambda^1_{|n|j]}, \tag{12}$$

$$R^\beta_{\alpha ij} = G^1_{\alpha[i} F^\beta_{|1|j]} + V^n_{\alpha\gamma} \delta^\gamma_{[i} \lambda^\beta_{|n|j]}, \tag{13}$$

$$R^\alpha_{1ij} = \Lambda^n_{11} \delta^1_{[i} \lambda^\alpha_{|n|j]}, \quad R^1_{\alpha ij} = V^n_{\alpha\beta} \delta^\beta_{[i} \lambda^1_{|n|j]}. \tag{14}$$

Следуя работам [2; 3], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T(V_{n-1})$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^i, \omega^j_i\}$, которую назовем согласно работам [2; 4] *внутренней (касательной) аффинной связностью гиперповерхности* Ω^1_{n-1}.

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперповерхность* Ω^1_{n-1} *(полем нормалей 1-го рода $N_1(A)$) индуцирует внутреннюю аффинную связность γ в касательном расслоении $T(\Omega)$ с формами связности* $\{\omega^i, \omega^j_i\}$ *и 2-формами кривизны (8—11). Компоненты тензора кривизны* $R^1_{kij} = \{R^1_{1ij}, R^\beta_{\alpha ij}, R^\beta_{1ij}, R^1_{\alpha ij}\}$ *связности γ имеют строение (12—14).*

3. Построим нормальную аффинную связность $\gamma^\perp$ [2] в расслоении $N_{n-1}(\Omega)$ нормалей 1-го рода L-подрасслоения гиперповерхности Ω^1_{n-1}, ассоциированной с гиперполосой H_1.

Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-1}(\Omega)$ имеют вид

$$D\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha, \; D\omega^\alpha_n = \omega^a_n \wedge \omega^\alpha_a + \Omega^\alpha_n,$$

$$D\omega^n_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega^n_a + \Omega^n_\alpha, \tag{15}$$

$$D\omega^n_n = \Omega^n_n, \; (a)$$

где формы Ω^β_α задаются уравнениями (9)

$$\Omega^\alpha_n = \omega^1_n \wedge \omega^\alpha_1 = \lambda^1_{ni} \omega^i \wedge F^\alpha_{1j} \omega^j = R^\alpha_{nij} \omega^i \wedge \omega^j, \tag{16}$$

$$\Omega^n_\alpha = \omega^1_\alpha \wedge \omega^n_1 = G^1_{\alpha i} \omega^i \wedge \Lambda^n_{11} \delta^1_j \omega^j = R^n_{\alpha ij} \omega^i \wedge \omega^j, \tag{17}$$

$$\Omega_n^n = \omega_n^\alpha \wedge \omega_\alpha^n + \omega_n^1 \wedge \omega_1^n = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i \wedge V_{\alpha\beta}^n \delta_j^\beta \omega^j + \\ + \lambda_{ni}^1 \omega^i \wedge \Lambda_{11}^n \delta_j^1 \omega^j = R_{nij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \tag{18}$$

$$R_{nij}^\alpha = \lambda_{n[i}^1 F_{|1|j]}^\alpha, \ \mathrm{R}_{\alpha ij}^{\mathrm{n}} = \Lambda_{11}^{\mathrm{n}} \mathrm{G}_{\alpha[i}^1 \delta_{j]}^1, \tag{19}$$

$$R_{nij}^n = \lambda_{n[i}^\alpha V_{|\alpha\beta|}^n \delta_{j]}^\beta + \Lambda_{11}^n \lambda_{n[i}^1 \delta_{j]}^1. \tag{20}$$

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперповерхность* Ω_{n-1}^1 *индуцирует внутреннюю центроаффинную связность (нормальную линейную связность)* $\gamma^\perp$ *в нормальном расслоении* $N_{n-1}(\Omega)$ *с формами связности* $\left\{\omega_a^b\right\}$ *и 2-формами кривизны (9, 16—18), компоненты тензора кривизны* $R_{aij}^b = \{R_{\alpha ij}^\beta, R_{nij}^\alpha, R_{\alpha ij}^n, R_{nij}^n\}$ *которой имеют строение (13, 19—20).*

4. Аналогично можно построить нормальную линейную связность $\chi^\perp$ в расслоении N_2 нормалей 1-го рода X-подрасслоения гиперповерхности Ω_{n-1}^1, ассоциированной с гиперполосой H_1.

Структурные уравнения нормального расслоения $N_2(\Omega)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &D\omega_1^1 = \Omega_1^1, \ \ D\omega_n^n = \Omega_n^n, \\ &D\omega_1^n = \omega_1^1 \wedge \omega_1^n + \omega_1^n \wedge \omega_n^n + \Omega_1^n, \\ &D\omega_n^1 = \omega_n^1 \wedge \omega_1^1 + \omega_n^n \wedge \omega_n^1 + \Omega_n^1, \end{aligned} \tag{21}$$

где форма Ω_1^1 задается выражением (8), а форма Ω_n^n — выражением (18),

$$\Omega_1^n = \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^n = F_{1i}^\alpha \omega^i \wedge V_{\alpha\beta}^n \delta_j^\beta \omega^j = R_{1ij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \tag{22}$$

$$\Omega_n^1 = \omega_n^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i \wedge G_{\alpha j}^1 \omega^j = R_{nij}^1 \omega^i \wedge \omega^j, \tag{23}$$

$$R_{1ij}^n = V_{\alpha\beta}^n F_{1[i}^\alpha \delta_{j]}^\beta, \tag{24}$$

$$R^1_{nij} = \lambda^{\alpha}_{n[i} G^1_{|\alpha|j]}. \qquad (25)$$

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперповерхность* Ω^1_{n-1} *индуцирует внутреннюю центроаффинную связность (нормальную линейную связность)* $\chi^{\perp}$ *в нормальном расслоении* $N_2(\Omega)$ *с формами связности* $\left\{\omega^q_p\right\}$ *и 2-формами кривизны (8), (18), (22), (23); компоненты тензора кривизны* $R^q_{pij} = \{R^1_{1ij}, R^n_{nij}, R^n_{1ij}, R^1_{nij}\}$ *связности* $\chi^{\perp}$ *имеют строение (12, 20, 24, 25).*

5. Введем нормальную линейную связность $\eta^{\perp}$ в расслоении N_1 нормалей 1-го рода H-подрасслоения гиперповерхности Ω^1_{n-1}, ассоциированной с гиперполосой H_1.

Структурное уравнение нормального расслоения $N_1(\Omega)$ имеет вид (15*a*), где 2-форма Ω^n_n определяется формулой (18), а тензор кривизны — (20).

Таким образом, приходим к следующему результату:

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперповерхность* Ω^1_{n-1} *индуцирует внутреннюю центроаффинную связность (нормальную линейную связность)* $\eta^{\perp}$ *в нормальном расслоении* $N_1(\Omega)$ *с формой связности* $\left\{\omega^n_n\right\}$ *и 2-формой кривизны (18), тензор кривизны* R^n_{nij} *которой имеет строение (20).*

Список литературы

1. *Кузыбаева С.С.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосы // Дни науки — 2009. Вып. 1 : Физико-математические науки. Калининград, 2009. С. 54—60.

2. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий : монография. Ереван, 1990.

3. *Остиану М. Н., Рыжков В. В., Швейкин П. И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. сем. ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 7—70.

4. *Попов Ю. И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства : учебное пособие. Калининград, 2001.

S. Kuzybaeva, Yu. Popov

Affine connections on hypersuface Ω_{n-1}^{1}

Inner affine and normal linear connections is given on a hypersurface Ω_{n-1}^{1}.

УДК 514.75

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
arturkuleshov@yandex.ru

Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка

Проективная структура Г. Ф. Лаптева построена как фактор-расслоение расслоения реперов второго порядка над гладким многообразием.

Ключевые слова: струя, дифференциальная группа, расслоение реперов, фактор-расслоение, центропроективная группа.

1. Постановка задачи

Г. Ф. Лаптев в работе [4] описал две последовательности главных расслоений, возникающих на произвольном дифференцируемом многообразии M_n:

$$M_n^1,\ M_n^2, \ldots, M_n^p, \ldots;\ P_n^1,\ P_n^2, \ldots, P_n^p, \ldots$$

© Кулешов А. В., 2015